



## 5.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Σύμφωνα με τον ορισμό του  $\mathbb{C}$ , η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών γίνονται όπως ακριβώς και οι αντίστοιχες πράξεις με διώνυμα  $a+bx$  στο  $\mathbb{R}$ , όπου βέβαια αντί για  $x$  έχουμε το  $i$ . Έτσι:

• Για την **πρόσθεση** δύο μιγαδικών αριθμών  $a+bi$  και  $\gamma+di$  έχουμε:

$$(a+bi) + (\gamma+di) = (a+\gamma) + (\beta+\delta)i.$$

Για παράδειγμα,  $(3+4i) + (5-6i) = (3+5) + (4-6)i = 8-2i.$

• Για την **αφαίρεση** του μιγαδικού αριθμού  $\gamma+di$  από τον  $a+bi$ , επειδή ο αντίθετος του μιγαδικού  $\gamma+di$  είναι ο μιγαδικός  $-\gamma-di$ , έχουμε:

$$(a+bi) - (\gamma+di) = (a+bi) + (-\gamma-di) = (a-\gamma) + (\beta-\delta)i.$$

Δηλαδή

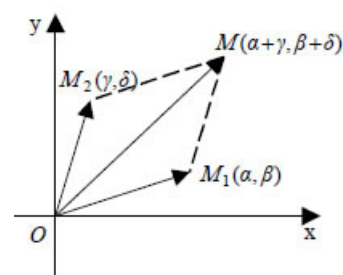
$$(a+bi) - (\gamma+di) = (a-\gamma) + (\beta-\delta)i.$$

Για παράδειγμα  $(3+4i) - (5-6i) = (3-5) + (4+6)i = -2+10i$

Αν  $M_1(a,\beta)$  και  $M_2(\gamma,\delta)$  είναι οι εικόνες των  $a+bi$  και  $\gamma+di$  αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε το άθροισμα

$$(a+bi) + (\gamma+di) = (a+\gamma) + (\beta+\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο  $M(a+\gamma, \beta+\delta)$ .



Επομένως, ισχύει  $\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$ , δηλαδή:

"Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών  $a+bi$  και  $\gamma+di$  είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους".

Επίσης, η διαφορά

$$(a+bi) - (\gamma+di) = (a-\gamma) + (\beta-\delta)i$$

παριστάνεται με το σημείο

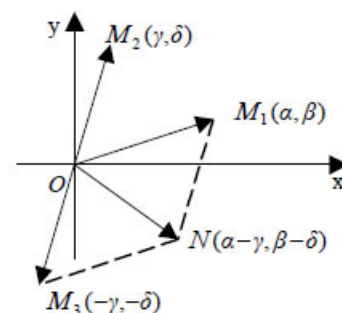
$$N(a-\gamma, \beta-\delta).$$

Επομένως, ισχύει  $\vec{ON} = \vec{OM}_1 - \vec{OM}_2$ ,

δηλαδή:

"Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $a+bi$  και  $\gamma+di$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους".

• Για τον **πολλαπλασιασμό** δύο μιγαδικών  $a+bi$  και  $\gamma+di$  έχουμε:





$$(a+bi)(\gamma+\delta i) = (a\gamma - b\delta) + (a\delta + b\gamma)i.$$

Για παράδειγμα,

$$(3+4i) \cdot (5-6i) = 15 - 18i + 20i - 24i^2 = (15+24) + (20-18)i = 39 + 2i.$$

Ειδικότερα, έχουμε:  $(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$  .. Ο αριθμός  $a-bi$  λέγεται **συζυγής** του  $a+bi$  και συμβολίζεται με  $\overline{a+bi}$ . Δηλαδή,

$$\overline{a+bi} = a-bi.$$

Επειδή είναι και  $\overline{a-bi} = a+bi$ , οι  $a+bi$ ,  $a-bi$  λέγονται **συζυγείς μιγαδικοί**.

• Τέλος, για να εκφράσουμε το πηλίκο  $\frac{a+bi}{\gamma+\delta i}$ , όπου  $\gamma+\delta i \neq 0$ , στη μορφή  $k+li$ , πολλαπλασιάζουμε τους όρους του κλάσματος με το συζυγή του παρονομαστή και έχουμε:

$$\frac{a+bi}{\gamma+\delta i} = \frac{(a+bi)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)} = \frac{(a\gamma+b\delta) + (b\gamma-a\delta)i}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{a\gamma+b\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{b\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Δηλαδή,

$$\frac{a+bi}{\gamma+\delta i} = \frac{a\gamma+b\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{b\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Για παράδειγμα:

$$\frac{2+i}{1-3i} = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{1+9} = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

### Δύναμη Μιγαδικού

Οι δυνάμεις ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  με εκθέτη ακέραιο ορίζονται ακριβώς όπως και στους πραγματικούς, δηλαδή ορίζουμε:

$$z^1 = z, \quad z^2 = z \cdot z, \dots, \text{ και γενικά } z^n = z^{n-1} \cdot z,$$

για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ , με  $n > 1$ . Επίσης, αν  $z \neq 0$ , ορίζουμε

$$z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n} \text{ για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$

Για τις δυνάμεις των μιγαδικών αριθμών ισχύουν οι ίδιες ιδιότητες που ισχύουν και για τις δυνάμεις των πραγματικών αριθμών. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις του  $i$  έχουμε:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι είναι:

$$i^4 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i, \quad i^6 = i^4 i^2 = 1 \cdot i^2 = -1, \quad i^7 = i^4 i^3 = 1 \cdot i^3 = -i,$$

δηλαδή, μετά το  $i^4$  οι τιμές του  $i^n$  επαναλαμβάνονται. Άρα, για να υπολογίσουμε συγκεκριμένη δύναμη του  $i$ , γράφουμε τον εκθέτη  $n$  στη μορφή  $n=4\rho+\nu$ , όπου  $\rho$  το πηλίκο και  $\nu$  το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του  $n$  με το 4, οπότε έχουμε:

$$i^n = i^{4\rho+\nu} = i^{4\rho} i^\nu = (i^4)^\rho i^\nu = 1^\rho i^\nu = i^\nu = \begin{cases} 1, & \text{αν } \nu=0 \\ i, & \text{αν } \nu=1 \\ -1, & \text{αν } \nu=2 \\ -i, & \text{αν } \nu=3 \end{cases}$$

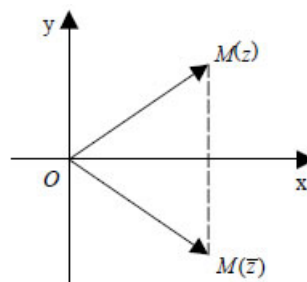


$$i^{21} = i^{4 \cdot 5 + 1} = i^1 = i.$$

### Ιδιότητες Συζυγών

Επειδή οι συζυγείς μιγαδικοί, όπως θα δούμε στις επόμενες παραγράφους, μας διευκολύνουν στη μελέτη των μιγαδικών αριθμών, θα αναφερθούμε ιδιαίτερα σε αυτούς.

- Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες  $M(\alpha, \beta)$  και  $M'(\alpha, -\beta)$  δύο συζυγών μιγαδικών  $z = \alpha + \beta i$  και  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.



- Για δύο συζυγείς μιγαδικούς αριθμούς  $z = \alpha + \beta i$  και  $\bar{z} = \alpha - \beta i$  μπορούμε εύκολα, με εκτέλεση των πράξεων, να διαπιστώσουμε ότι:

$$z + \bar{z} = 2\alpha$$

$$z - \bar{z} = 2\beta i$$

- Αν  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \gamma + \delta i$  είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί, τότε:

$$1. \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2. \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$3. \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$4. \quad \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχτούν με εκτέλεση των πράξεων. Για παράδειγμα έχουμε:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(\alpha + \beta i) + (\gamma + \delta i)} = \overline{(\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)i}$$

$$C = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta)i = (\alpha - \beta i) + (\gamma - \delta i) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και για περισσότερους από δυο μιγαδικούς αριθμούς. Είναι δηλαδή:

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n.$$

Ιδιαίτερα, αν είναι  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ , τότε η τελευταία ισότητα γίνεται:

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

Για παράδειγμα, 
$$\overline{\left( \frac{2-3i}{4+5i} \right)^3} = \left[ \overline{\left( \frac{2-3i}{4+5i} \right)} \right]^3 = \left( \frac{2+3i}{4-5i} \right)^3.$$

**Επίλυση της Εξίσωσης  $az^2 + \beta z + \gamma = 0$  με  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$**

Επειδή  $i^2 = -1$  και  $(-i)^2 = i^2 = -1$ , η εξίσωση  $z^2 = -1$  έχει στο σύνολο  $\mathbb{C}$  των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις  $z_1 = i$  και  $z_2 = -i$ . Ομοίως, η εξίσωση  $z^2 = -4$  έχει στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δύο λύσεις, τις  $z_1 = 2i$  και  $z_2 = -2i$ , αφού



Εργαζόμαστε όπως στην αντίστοιχη περίπτωση στο  $\mathbf{R}$  και τη μετασχηματίζουμε, με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων, στη μορφή:

$$\left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2},$$

όπου  $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$  η διακρίνουσα της εξίσωσης. Έτσι, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

•  $\Delta > 0$ . Τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές λύσεις:  $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

•  $\Delta = 0$ . Τότε έχει μια διπλή πραγματική λύση:  $z = \frac{-\beta}{2\alpha}$

•  $\Delta < 0$ . Τότε, επειδή  $\frac{\Delta}{4\alpha^2} = \frac{(-1)(-\Delta)}{4\alpha^2} = \frac{i^2(\sqrt{-\Delta})^2}{(2\alpha)^2} = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2$ , η εξίσωση

$$\text{γράφεται: } \left(z + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2.$$

Άρα οι λύσεις της είναι:

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}, \quad (1)$$

οι οποίες είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί.

Για παράδειγμα, η εξίσωση  $z^2 - 5z + 6 = 0$  έχει  $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$  και οι λύσεις της είναι:  $z_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ ,  $z_2 = \frac{5-1}{2} = 2$ .

Όμως, η εξίσωση  $z^2 - 2z + 2 = 0$  έχει  $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$  και οι λύσεις της είναι οι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{4}}{2} = 1 + i, \quad z_2 = \frac{2 - i\sqrt{4}}{2} = 1 - i.$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Παρατηρούμε ότι και εδώ ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1 + z_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad z_1 z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1. Για τις διάφορες τιμές του θετικού ακέραιου  $n$  να υπολογιστεί το άθροισμα**

$$S = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n.$$

### ΛΥΣΗ

Οι προσθετέοι του αθροίσματος έχουν πλήθος  $n$  και είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο  $i$  και λόγο επίσης  $i$ . Επομένως,  $S = i \frac{i^n - 1}{i - 1}$ , οπότε, λόγω της ισότητας  $n = 4\rho + \nu$  της ευκλείδειας διαίρεσης του  $n$  με το 4, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

•  $\nu = 0$ . Τότε  $n = 4\rho$ , οπότε  $S = i \frac{1 - 1}{i - 1} = 0$ .



$$\bullet v=3. \text{ Τότε } v=4\rho+3, \text{ οπότε } S=i\frac{-i-1}{i-1}=\frac{1-i}{i-1}=-1.$$

2. Να βρεθεί το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  στις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι α) φανταστικός β) πραγματικός.

**ΛΥΣΗ**

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-2i} &= \frac{(x-1)+yi}{x+(y-2)i} \\ \text{Αν } z=x+yi, \text{ τότε} &= \frac{(x^2-x+y^2-2y)+i(2x+y-2)}{x^2+(y-2)^2} \\ &= \frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2} + \frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}i. \end{aligned}$$

Επομένως:

α) Ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι φανταστικός, αν και μόνο αν  $\frac{x^2-x+y^2-2y}{x^2+(y-2)^2}=0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν  $x^2-x+y^2-2y=0$  και  $x^2+(y-2)^2 \neq 0$  ή ισοδύναμα

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4} \text{ και } (x,y) \neq (0,2).$$

Άρα, το σύνολο των εικόνων του  $z$  είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο  $K\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  και ακτίνα  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , με εξαίρεση το σημείο  $A(0,2)$ .

β) Ο αριθμός  $\frac{z-1}{z-2i}$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν  $\frac{2x+y-2}{x^2+(y-2)^2}=0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν  $2x+y-2=0$  και  $x^2+(y-2)^2 \neq 0$ .

Άρα, το σύνολο των εικόνων του  $z$  είναι τα σημεία της ευθείας με εξίσωση  $2x+y-2=0$ , με εξαίρεση το σημείο  $A(0,2)$ .

## Ασκήσεις

### Α' ΟΜΑΔΑΣ

- Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbf{R}$ , ώστε ο  $z=(\lambda+3i)(2-i)$  να είναι:  
α) πραγματικός αριθμός      β) φανταστικός αριθμός
- Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x, y$  για τους οποίους ισχύει:



3. Στο μιγαδικό επίπεδο να σημειώσετε τις εικόνες και τις διανυσματικές ακτίνες των μιγαδικών αριθμών  $1+i$ ,  $1$ ,  $i$ ,  $-2i$ ,  $3+4i$ ,  $3-4i$ ,  $5$ ,  $0$ .
4. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  που ικανοποιούν σχέσεις  
 α) Το πραγματικό μέρος του  $z$  είναι ίσο με μηδέν  
 β) Το φανταστικό μέρος του  $z$  είναι ίσο με μηδέν  
 γ) Το πραγματικό μέρος του  $z$  είναι ίσο με το φανταστικό του μέρος.
5. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται και να γράψετε το αποτέλεσμα στη μορφή  $a+bi$   
 α)  $(-4+6i)+(7-2i)$       β)  $(3-2i)-(6+4i)$   
 γ)  $(3+4i)+(-8-7i)+(5+3i)$       δ)  $(3+2i)(4+5i)$   
 ε)  $3i(6+i)$       στ)  $(4+3i)(4-3i)$   
 ζ)  $i(3+i)(2-i)$ .
6. Να γράψετε τους παρακάτω μιγαδικούς στη μορφή  $a+bi$ :  
 α)  $\frac{1}{1-i}$     β)  $i^6$     γ)  $i^2+2i+1$     δ)  $(1+i\sqrt{3})^2$     ε)  $\frac{3+i}{2-i}$     στ)  $\frac{6-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}$ .
7. Να βρείτε τους  $x, y \in \mathbf{R}$ , για τους οποίους ισχύει:  
 α)  $(3-2i)^2 - (x+iy) = x-yi$   
 β)  $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$   
 γ)  $(3-2i)(2x-iy) = 2(2x-iy) + 2i - 1$ .
8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:  
 α)  $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$       β)  $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$ .
9. Ποιός είναι ο  $\bar{z}$ , όταν:  
 α)  $z = -5+7i$     β)  $z = -4-9i$     γ)  $z = 4i$   
 δ)  $z = 11$     ε)  $z = -i$     στ)  $z = 0$
10. Με ποιες συμμετρίες μπορούν να προκύψουν από την εικόνα του μιγαδικού  $z=x+yi$  οι εικόνες των μιγαδικών  $\bar{z}$ ,  $-z$  και  $-\bar{z}$ ;
11. Αν  $z_1 = \frac{5-9i}{7+4i}$  και  $z_2 = \frac{5+9i}{7-4i}$ , να δείξετε ότι ο  $z_1+z_2$  είναι πραγματικός αριθμός, ενώ ο  $z_1-z_2$  φανταστικός αριθμός.



13. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:

α)  $x^2 - 3x + 2 = 0$     β)  $x^2 - 2x + 3 = 0$     γ)  $x + \frac{1}{x} = 1$ .

14. Αν μια ρίζα της εξίσωσης  $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$ , όπου  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , είναι  $3 + 2i$ , να βρείτε τις τιμές των  $\beta$  και  $\gamma$ .

### **Β' ΟΜΑΔΑΣ**

1. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  και  $\delta$  είναι πραγματικοί αριθμοί, να εξετάσετε πότε το πηλίκο  $\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}$  είναι πραγματικός αριθμός.

2. Αν  $z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $\frac{1}{z^2 - z}$ .

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(1 + i)^{20} - (1 - i)^{20}$ .

4. Πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση  $i^v + i^{-v}$ ;

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

α)  $\bar{z} = z^2$     β)  $\bar{z} = z^3$ .

6. Έστω ο μιγαδικός  $z$  με  $z \neq 0$ . Να δείξετε ότι ο  $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$  είναι πραγματικός και ότι  $-2 \leq \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \leq 2$ .

7. Να αποδείξετε ότι  $(\alpha + \beta i)^{10} + (\beta - \alpha i)^{10} = 0$ , όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

8. α) Για ένα μιγαδικό αριθμό  $z$  να αποδείξετε ότι:

- Ο  $z$  είναι πραγματικός, αν και μόνο αν  $z = \bar{z}$
- Ο  $z$  είναι φανταστικός, αν και μόνο αν  $z = -\bar{z}$ .

β) Αν  $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$  και  $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$  και  $z_1 \cdot z_2 \neq -1$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $u = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$  είναι πραγματικός, ενώ ο αριθμός  $v = \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2}$  είναι φανταστικός.

9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$  για τους οποίους ισχύει:

α)  $\operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 5 \operatorname{Re}(z)$     β)  $\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = -3 \operatorname{Im}(z)$ .